Приклади розв’язання контрольних завдань для самостійної підготовки до аудиторних контрольних робіт з ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ для студентів заочної форми навчання за спеціальністю «Біотехнологія»

1. Використовуючи правила диференціювання добутку та складної функції, знайдемо похідну даної функції:

$$y' = \left(x \cdot arctg\sqrt{x}\right)' = (x)' \cdot arctg\sqrt{x} + x \cdot \left(arctg\sqrt{x}\right)' = 1 \cdot arctg\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= arctg\sqrt{x} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = arctg\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot (1+x)}.$$

Диференціал функції знайдемо за формулою:

$$dy = y' \cdot dx .$$

Отже:

$$dy = \left(arctg\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot (1+x)} \right) dx.$$

2. Використовуючи правила диференціювання степеневої та складної функції, знайдемо першу похідну даної функції:

$$y' = \left[\left(x^2+1\right)^3 \right] = 3 \cdot \left(x^2+1\right)^2 \cdot \left(x^2+1\right)' = 3 \cdot \left(x^2+1\right)^2 \cdot 2x = 6x \cdot \left(x^2+1\right)^2 =$$

$$= 6x \cdot \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) = 6x^5 + 12x^3 + 6x.$$

Знайдемо другу похідну:

$$y'' = (y')' = \left[6x^5 + 12x^3 + 6x\right]' = 5 \cdot 6x^4 + 3 \cdot 12x^2 + 6 = 30x^4 + 36x^2 + 6 .$$

3. Знайдемо область визначення функції. Функція визначена на числовій прямій. Отже, ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$.

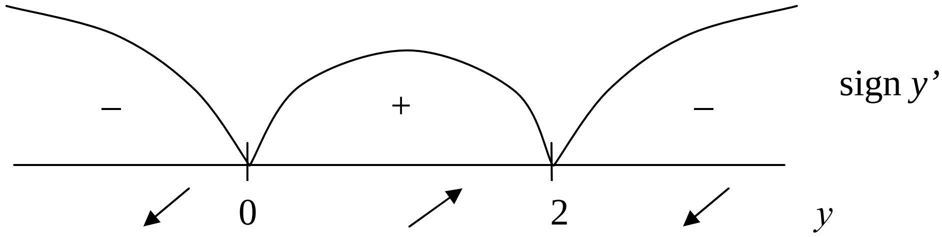
Дослідимо функцію на екстремум, знайдемо інтервали монотонності. Для цього знайдемо першу похідну та прирівняємо її до нуля.

$$y' = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)' \cdot e^x - \left(e^x\right)' \cdot x^2}{\left(e^x\right)^2} = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^1 \cdot 1}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot \left(2x - x^2\right)}{e^{2x}} = \frac{\left(2x - x^2\right)}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x(2-x)}{e^x} = 0 .$$

Звідки: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Отримали 2 стаціонарні точки та 3 інтервали монотонності. Дослідимо знак похідної на кожному з цих інтервалів:



На інтервалі $(-\infty; 0)$ $y' < 0$, отже функція спадає;

на інтервалі $(0; 2)$ $y' > 0$, отже функція спадає;

на інтервалі $(2; \infty)$ $y' < 0$, отже функція спадає.

Відповідно точки $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$ є точками екстремуму. Оскільки при переході через точку $x_1 = 0$ похідна змінює знак з «–» на «+», то дана точка є точкою мінімуму, при переході через точку $x_2 = 2$ похідна змінює свій знак з «+» на «–», то дана точка є точкою максимуму.

Знайдемо мінімальне та максимальне значення функції:

$$y_{\min} = \frac{0^2}{e^0} = 0; \quad y_{\max} = \frac{2^2}{e^2} \approx 0,54.$$

4. Знайдемо область визначення функції. Функція – поліном третього степеня, визначна на числовій прямій. Отже, ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$.

Дослідимо функцію на опуклість та вгнутість, знайдемо точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну та прирівняємо її до нуля.

$y' = 3x^2 - 10x + 3$;

$y'' = (y') = 6x - 10 = 2(3x - 5)$;

$y'' = 0$, якщо $3x - 5 = 0$, звідки $x = \frac{5}{3}$.

Отримали одну критичну точку $x = \frac{5}{3}$ та 2 інтервали опуклості і вгнутості.

Для $x \in (-\infty; 5/3)$ $y''(x) < 0$, бо, наприклад, $y''(0) = -10 < 0$, а для $x \in (5/3; \infty)$ $y''(x) > 0$, оскільки, наприклад, $y''(4) = 14 > 0$. Отже, в інтервалі $(-\infty; 5/3)$ крива є опуклою, а в інтервалі $(5/3; +\infty)$ – вгнутою.

Відповідно точка $x = \frac{5}{3}$ є точкою перегину, оскільки при переході через неї друга похідна змінює свій знак з «–» на «+».

Знайдемо значення функції в точці перегину:

$$y\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 3\frac{5}{3} + 15 = \frac{290}{27}.$$

5. Для визначення максимальної абсолютної похибки застосуємо диференціальне числення. Отримаємо:

$$dP=\frac{\partial P}{\partial I}\cdot dI+\frac{\partial P}{\partial U}\cdot dU .$$

Замінимо диференціал на приріст функції. Отримаємо:

$$\Delta P=\frac{\partial P}{\partial I}\cdot \Delta I+\frac{\partial P}{\partial U}\cdot \Delta U .$$

Знайдемо частинні похідні даної функції:

$\frac{\partial P}{\partial I}=\left(I\cdot U\right)'_I=U$;

$\frac{\partial P}{\partial U}=\left(I\cdot U\right)'_U=I$.

При $I=0,5\pm 0,01$; $U=215\pm 2$ будемо мати:

$\frac{\partial P}{\partial I}=215$; $\Delta I=0,01$;

$\frac{\partial P}{\partial U}=0,5$; $\Delta U=2$.

Отже:

$$\Delta P=215\cdot 0,01+0,05\cdot 2=2,25 \text{ Вт}.$$

Відносну похибку знайдемо за формулою:

$$\partial P=\frac{\Delta P}{P}\cdot 100\% .$$

Підставимо числові значення, отримаємо:

$$\partial P=\frac{2,25}{0,5\cdot 215}\cdot 100\%\approx 2,1\% .$$

6. Для знаходження точок екстремуму даної функції знайдемо частинні похідні по змінних *X* та *Y*, та прирівняємо їх до нуля. Отже:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2+2\cdot x\cdot y-4x+8y\right)'_x=2x+2y-4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+2\cdot x\cdot y-4x+8y\right)'_y=2x+8;$$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y-4=0\\ 2x+8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot(-4)+2y-4=0\\ x=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12+2y=0\\ x=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=6\\ x=-4\end{cases}$$

Отримали 1 стаціонарну точку: $O(-4;6)$.

Для перевірки даної точки на екстремум знайдемо значення виразу:

$$\Delta=AC-B^2,$$

де $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Знайдемо відповідні частинні похідні та їх значення в стаціонарній точці $O(-4;6)$:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2x+2y-4\right)'_x=2;$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2x + 2y - 4\right)'_y = 2;$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2x + 8\right)'_y = 0.$$

Тоді:

$$\Delta = 2 \cdot 0 - 2^2 = -4.$$

Оскільки вираз $\Delta < 0$ $\left(-4 < 0\right)$, то в даній точці екстремуму немає, тобто дана функція не має точок екстремуму.

7. Зробимо заміну:
$2x + 1 = t$, тоді $dt = 2dx$.

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int ctg\left(2x+1\right)dx = \frac{1}{2}\int ctgtdt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sin t}dt.$$

Зробимо заміну:

$$\sin t = u, \text{ тоді } du = \cos tdt.$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sin t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|u\right| + \ln\left|C\right| = \ln u^{\frac{1}{2}} + \ln\left|C\right| = \ln\left|C \cdot u^{\frac{1}{2}}\right| = \ln\left|C \cdot \sqrt{u}\right|.$$

Оскільки $u = \sin t$, то :

$$\ln\left|C \cdot \sqrt{u}\right| = \ln\left|C \cdot \sqrt{\sin t}\right|.$$

Оскільки $t = 2x + 1$, то :

$$\ln\left|C \cdot \sqrt{\sin t}\right| = \ln\left|C \cdot \sqrt{\sin\left(2x+1\right)}\right|.$$

8. Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Позначимо:

$$\begin{cases} x^2 dx = dv \\ \ln\left(1+x\right) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x^3}{3} \\ du = \dfrac{1}{x+1} \end{cases}.$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int x^2 \cdot \ln\left(1+x\right)dx = \ln\left(1+x\right) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x+1}dx.$$

В підінтегральному виразі отримали неправильний дріб. Розділимо чисельник на знаменник. Отримаємо:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & \underline{x+1} \\ \underline{x^3 + x^2} & x^2 - x + 1 \\ -x^2 & \\ \underline{-x^2 - x} & \\ x & \end{array}$$

$\frac{x+1}{-1}$

Отже:

$$\frac{x^3}{x+1}=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}.$$

Тоді:

$$\ln(1+x)\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x+1}dx=\frac{\ln(1+x)\cdot x^3}{3}-\frac{1}{3}\int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\ln(1+x)\cdot x^3-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)\right]+C.$$

9. Зробимо заміну:

$x+1=t$, тоді $dt=dx$.

При $x=0 \quad t=1$;

$x=1 \quad t=2$.

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\int_1^2\sqrt{t}dt=\int_1^2 t^{1/2}dt=\left.\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\right|_1^2=\left.\frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\right|_1^2=\left.\frac{2}{3}\cdot\sqrt{t^3}\right|_1^2=\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{2^3}-\sqrt{1^3}\right)\approx 1,22.$$

10. Середнє значення функції на інтервалі $[a;b]$ розраховується за формулою:

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Підставимо числові значення. Отримаємо:

$$\mu=\frac{\int_0^{\pi/3}\sin 3xdx}{\pi/3-0}=\frac{3}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/3}\sin 3xdx=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left.(-\cos 3x)\right|_0^{\pi/3}=-\frac{1}{\pi}\cdot\left.\cos 3x\right|_0^{\pi/3}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{\pi}\cdot(-1-1)=\frac{2}{\pi}\approx 0,637.$$

11. Проведемо перетворення:

$x^2y'+x=0$

$x^2y'=x$

$y'=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$

Оскільки $y'=\frac{dy}{dx}$, то:

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$

Отримали рівняння зі змінними, що розподіляються:

$dy=\frac{dx}{x}.$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int dy = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$y = \ln|x| + \ln|C|$$
$$y = \ln|Cx|$$

12. Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$x^2 y^2 y' = x^3 + y^3;$$
$$y' = \frac{x^3}{xy^2} + \frac{y^3}{xy^2};$$
$$y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}.$$

Зробимо заміну $y = u \cdot x$, де $u = u(x)$. Тоді: $y' = u'x + u$.

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$u'x + u = \frac{1}{u^2} + u$$
$$u'x = \frac{1}{u^2}.$$

Оскільки $u' = \frac{du}{dx}$, то:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1}{u^2}.$$

Отримали рівняння із змінними, що розподіляються.

$$u^2 du = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int u^2 du = \int \frac{dx}{x}.$$
$$\frac{u^3}{3} = \ln|x| + \ln|C|.$$
$$u^3 = 3\ln|xC|.$$

Відносно $y = u \cdot x$ загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y^3 = 3x^3 \ln|xC| \Rightarrow y = x\sqrt[3]{3\ln|xC|}.$$

Для знаходження постійної C скористуємося початковими умовами:

$$y(x=1) = \sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt[3]{3} = 1 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \ln|C|}$$
$$3 = 3\ln C$$
$$\ln C = 1 \qquad C_0 = e$$

Частинний розв'язок має вигляд:

$$y = x\sqrt[3]{3\ln|ex|} = x\sqrt[3]{3(\ln|x| + 1)}.$$

13. Зробимо заміну $y = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тоді:

$y' = u'v + v'u$.

Підставимо дану заміну:

$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x$;

$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) = x$.

Знайдемо таку функцію $v(x)$, при якій:

$v' - \frac{3}{x}v = 0$.

Це рівняння з відокремленими змінними.

$v' = \frac{3}{x}v$;

$\frac{dv}{dx} = \frac{3}{x}v$;

$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$\int \frac{dv}{v} = \int 3\frac{dx}{x}$;

$\ln v = 3\ln x = \ln x^3$.

Тоді $v = x^3$.

Підставимо знайдену функцію $v(x) = x^3$ в рівняння. Отримаємо:

$u'x^3 + u\left(3x^2 - \frac{3}{x}x^3\right) = x$.

Оскільки $u' = \frac{du}{dx}$, то

$\frac{du}{dx}x^3 = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{x^2}$.

Проінтегруємо обидві частини рівності. Отримаємо:

$\int du = \int \frac{dx}{x^2}$;

$u = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = C - \frac{1}{x}$.

Отже:

$v = x^3$, а $u = C - \frac{1}{x}$.

Тоді загальний розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$y = u \cdot v = \left(C - \frac{1}{x}\right)x^3 = Cx^3 - x^2$.

14. Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння.

$r^2 + 4r = 0$;

$r \cdot (r + 4) = 0$.

Звідки:

$r_1 = 0$, $r_2 = -4$.

Оскільки корені дійсні і різні, то загальний розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y = C_1 \cdot e^{r1x} + C_2 \cdot e^{r2x} = C_1 \cdot e^{0\cdot x} + C_2 \cdot e^{-4x} = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

Для знаходження постійних інтегрування C_1 і C_2 скористаємось початковими умовами: $y(x=0) = -6$, $y'(x=0) = -1$. Отримаємо:

$$y' = \left(C_1 + C_2 \cdot e^{-4x}\right)' = -4 \cdot C_2 \cdot e^{-4x}$$

$$\begin{cases} -6 = C_1 + C_2 \cdot e^{-4\cdot 0} \\ -1 = -4 \cdot C_2 \cdot e^{-4\cdot 0} \end{cases} = \begin{cases} -6 = C_1 + C_2 \\ -1 = -4 \cdot C_2 \end{cases} = \begin{cases} C_1 = -6 - C_2 \\ C_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} = \begin{cases} C_1 = -6 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{25}{4} \\ C_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Отже частковий розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y = \frac{1}{4} - \frac{25}{4} \cdot e^{-4x} = \frac{1 - 25 \cdot e^{-4x}}{4}.$$