

Приклади розв'язання задач

Приклади розв'язання задач	1
РОЗДІЛ 1. ТЕРМОДИНАМІКА БІОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ	1
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНА БІОФІЗИКА	2
РОЗДІЛ 3. МОЛЕКУЛЯРНА БІОФІЗИКА.....	3
РОЗДІЛ 4. БУДОВА ТА ВЛАСТИВОСТІ БІОЛОГІЧНИХ МЕМБРАН	4
РОЗДІЛ 5. ТРАНСПОРТ РЕЧОВИН КРІЗЬ БІОЛОГІЧНІ МЕМБРАНИ	5
РОЗДІЛ 6. БІОФІЗИКА НЕРВОВОГО ІМПУЛЬСУ	6
РОЗДІЛ 7. БІОФІЗИКА М'ЯЗОВОГО СКОРОЧЕННЯ	6
РОЗДІЛ 8. БІОФІЗИКА ЗОРУ.....	7
РОЗДІЛ 9. ДІЯ ФІЗИЧНИХ ФАКТОРІВ НА БІОЛОГІЧНІ ОБ'ЄКТИ	8
РОЗДІЛ 10. ВЛАСНІ ФІЗИЧНІ ПОЛЯ ЛЮДИНИ.....	8

Розділ 1. Термодинаміка біологічних процесів

Задача 1.1. Концентрація Na^+ усередині клітини складає 0,015 моль/л, а зовні – 0,15 моль/л. Температура клітини дорівнює 37°C , її внутрішня сторона має потенціал -60 мВ. Розрахувати осмотичну та електричну роботу, а також зміну електрохімічного потенціалу при переносі іонів натрію через мембрану нервової клітини назовні.

Розв'язання. Осмотична робота при переносі іонів в область із концентрацією c_2 з області з концентрацією c_1 дорівнює

$$RT \ln \frac{c_2}{c_1} = 8,31 \cdot 310 \cdot \ln \frac{0,15}{0,015} = 5932 \text{ (Дж/моль)} \approx 5,9 \text{ (кДж/моль)}.$$

Якщо електричний потенціал із зовнішнього боку клітини прийняти за нуль, то електрична робота складе

$$zF(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \cdot 9,65 \cdot 10^4 \cdot (0 + 60 \cdot 10^{-3}) = 5790 \text{ (Дж/моль)} \approx 5,8 \text{ (кДж/моль)}.$$

Так як з Na^+ не відбувається ніяких хімічних змін, то $\Delta\mu_0 = 0$. Тоді зміна електрохімічного потенціалу

$$\overline{\Delta\mu} = \Delta\mu_0 + RT \ln(c_2/c_1) + zF(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 + 5,9 + 5,8 = 11,7 \text{ кДж/моль}.$$

Зміна електрохімічного потенціалу позитивна, тобто даний процес не вигідний і може відбуватися тільки за рахунок притоки енергії, у даному випадку – за рахунок енергії АТФ.

Задача 1.2. Синтез сахарози здійснюється за наступною схемою:

Глюкоза + фруктоза + АТФ \rightarrow Сахароза + АДФ + Ф, $\Delta G^\circ = -6,3$ кДж/моль. Знайти константу рівноваги цієї реакції.

Розв'язання. Зміна вільної енергії в ході хімічної реакції зв'язана з константою хімічної рівноваги K цієї реакції в такий спосіб

$$\Delta G^\circ = -RT \ln K,$$

відкіля

$$K = \exp\left(-\frac{\Delta G^o}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{-6300}{8,31 \cdot 298}\right) = 12,7.$$

Задача 1.3. Обчислити ефективність спряження синтезу сахарози з реакцією гідролізу АТФ ($\Delta G^o_{\text{АТФ}} = -30,5$ кДж/моль), використовуючи схему попередньої задачі.

Розв'язання. Ефективність спряження, визначається як відношення корисної роботи (у даному випадку енергії, яку необхідно затратити на синтез сахарози $\Delta G^o_{\text{сах}}$) до витраченої роботи ($\Delta G^o_{\text{АТФ}}$):

$$\eta = \frac{\Delta G^o_{\text{сах}}}{\Delta G^o_{\text{АТФ}}} = \frac{\Delta G^o_{\text{АТФ}} - \Delta G^o}{\Delta G^o_{\text{АТФ}}} = \frac{-30,5 - (-6,3)}{-30,5} = 0,79.$$

Таким чином, ефективність спряження складає 79%.

Розділ 2. Математична біофізика

Задача 2.1. Початкова концентрація в крові деякого препарату дорівнювалася 50 мкг/мл, а через 10 годин зменшилася до 20 мкг/мл. Вважаючи, що даний процес описується однокамерною моделлю, розрахувати константу елімінації цього препарату і час його напіввиведення.

Розв'язання. Константу елімінації обчислимо з лінеаризованого рівняння для концентрації ($\ln c = \ln c_0 - k_{el}t$):

$$k_{el} = \frac{\ln(c/c_0)}{t} = \frac{\ln(50/20)}{10} = 0,092 \text{ 1/год.}$$

Час напіввиведення препарату:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{el}} = 7,5 \text{ год.}$$

Задача 2.2. Пацієнту було уведено внутрішньом'язово 220 мг препарату. Обчислити час, протягом якого концентрація цього препарату в крові досягне свого максимального значення, а також концентрацію препарату в крові через 3 години після введення. Константи усмоктування і виведення рівні відповідно 2 1/год і 0,5 1/год. Уявний об'єм крові прийняти рівним 4,5 л.

Розв'язання. Так як препарат уводиться не безпосередньо в кров, а в іншу тканину, то даний процес буде описуватися моделлю з підкамерою. Час досягнення максимальної концентрації обчислимо з рівняння (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**):

$$t_{\max} = \frac{\ln\left(\frac{k_{in}}{k_{el}}\right)}{k_{in} - k_{el}} = \frac{\ln\left(\frac{2}{0,5}\right)}{2 - 0,5} = 0,92 \text{ год} = 55 \text{ хв.}$$

Для обчислення концентрації препарату в довільний момент часу скористаємося рівнянням (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**)

$$c(t) = \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (e^{-k_{el}t} - e^{-k_{in}t}) = \frac{220 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{4,5 \cdot 10^{-3} (2 - 0,5)} (e^{-0,5 \cdot 3} - e^{-2 \cdot 3}) =$$

$$= 14,4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3 = 14,4 \text{ мкг/мл.}$$

Розділ 3. Молекулярна біофізика

Задача 3.1. При переносі етану з бензолу у воду при температурі 25 °С ентальпія зменшилася на 9240 Дж/моль, а ентропія – на 84 Дж/(моль·К). Розрахувати зміну повного термодинамічного потенціалу в цьому процесі. Чи буде бензол розчинятися у воді?

Розв'язання. Зміна повного термодинамічного потенціалу складе

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = -9240 - 298 \cdot (-84) \approx 16000 \text{ Дж/моль} = 16 \text{ кДж/моль.}$$

Тому що $\Delta G > 0$, то бензол слабо розчинимо у воді.

Задача 3.2. При неферментативному розкладанні перекису водню енергія активації реакції складає 75 кДж/моль, а при участі ферменту каталази знижується до $E_{акт \phi} = 8$ кДж/моль. Розрахувати, в скільки разів збільшиться швидкість ферментативної реакції в порівнянні з неферментативною при температурі 25°C.

Розв'язання. Відношення швидкостей реакції дорівнює відношенню констант цих реакцій

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k_2}{k_1}$$

або, відповідно до рівняння Арреніуса,

$$\frac{v_{\phi}}{v_n} = \frac{\exp\left(-\frac{E_{акт \phi}}{RT}\right)}{\exp\left(-\frac{E_{акт н}}{RT}\right)} = \exp\left(\frac{E_{акт н} - E_{акт \phi}}{RT}\right),$$

де v_{ϕ} і v_n – швидкості, $E_{акт \phi}$ і $E_{акт н}$ – енергії активації ферментативної і неферментативної реакцій, відповідно. Підставляючи чисельні дані, отримуємо

$$\frac{v_{\phi}}{v_n} = \exp\left(\frac{75 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3}{8,81 \cdot 298}\right) = 5,6 \cdot 10^{11}.$$

Задача 3.3. Використовуючи умову попередньої задачі, розрахувати, при якій температурі середовища T_2 , швидкість неферментативної реакції буде дорівнює швидкості ферментативної при температурі $T_1 = 25^\circ\text{C}$.

Розв'язання. За умови, що $v_n = v_f$, із рівняння Арреніуса, отримуємо

$$\exp\left(-\frac{E_{акт\ n}}{RT_2}\right) = \exp\left(-\frac{E_{акт\ f}}{RT_1}\right),$$

звідки

$$T_2 = \frac{T_1 E_{акт\ n}}{E_{акт\ f}}.$$

Підставляючи чисельні дані, отримуємо

$$T_2 = \frac{T_1 E_{акт\ n}}{E_{акт\ f}} = \frac{298 \cdot 75 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} = 2794 \text{ K} \approx 2500^\circ\text{C}.$$

Розділ 4. Будова та властивості біологічних мембран

Задача 4.1. Розрахувати товщину мембрани, якщо її ділянка площею 1 мкм^2 має електричну ємність, рівну $0,7 \cdot 10^{-14} \text{ Ф}$. Діелектрична проникність ліпідів дорівнює 2.

Розв'язання. З формули для ємності електричного конденсатора

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$$

знайдемо товщину мембрани d

$$d = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{C} = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-12}}{0,7 \cdot 10^{-14}} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 5 \text{ нм}.$$

Задача 4.2. Розрахувати коефіцієнт латеральної дифузії фосфоліпідів, якщо середній час їхнього осілого життя складає $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. Площа, що займається одною молекулою на мембрані, складає $7 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$.

Розв'язання. Час осілого життя обернено пропорційний частоті перескоків молекул на мембрані внаслідок латеральної дифузії

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{A}{2\sqrt{3}D},$$

звідки одержуємо D

$$D = \frac{A}{2\sqrt{3}\tau} = \frac{7 \cdot 10^{-19}}{2\sqrt{3} \cdot 3,3 \cdot 10^{-8}} = 6,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Розділ 5. Транспорт речовин крізь біологічні мембрани

Задача 5.1. Різниця концентрацій іонів на мембрані деякої клітини дорівнює 45 ммоль/л, коефіцієнт розподілу їх між мембраною і навколишнім середовищем дорівнює 30, коефіцієнт дифузії – $1,5 \cdot 10^{-8}$ см²/с, потік – $2,5 \cdot 10^{-3}$ моль/(м²·с). Розрахувати товщину цієї мембрани.

Розв'язання. З рівняння Фіка

$$J = -\frac{DK(c_o - c_i)}{l}$$

одержуємо

$$l = \frac{DK\Delta c}{J} = \frac{1,5 \cdot 10^{-14} \cdot 30 \cdot 45}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 8,1 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 8,1 \text{ нм.}$$

Задача 5.2. Розрахувати енергію, необхідну для здійснення одного циклу Na⁺,K⁺-АТФазой у гігантському аксоні кальмара, якщо трансмембранний потенціал цієї клітини складає –60 мВ, концентрація іонів K⁺ – 0,36 ммоль/м³ і 0,01 ммоль/м³, концентрація іонів Na⁺ – 0,069 ммоль/м³ і 0,425 ммоль/м³ усередині і зовні, відповідно. Температуру клітини вважати рівною 37 °С.

Розв'язання. Na⁺,K⁺-насос викачує з клітини три іони натрію і закачує усередину два іони калію, при цьому з клітини виноситься один позитивний заряд. Таким чином, насос робить осмотичну й електричну роботу.

Осмотична робота в загальному вигляді записується як

$$RT \ln \frac{c_2}{c_1},$$

де c_1 – концентрація речовини на початку процесу, c_2 – наприкінці.

Осмотична робота, необхідна для переносу усередину клітини двох іонів калію складає

$$2RT \ln \frac{[K^+]_i}{[K^+]_o},$$

де $[K^+]_o$ – концентрація іонів калію зовні клітини (у початковому стані), $[K^+]_i$ – концентрація іонів калію усередині клітини (у кінцевому стані). Аналогічним способом записується осмотична робота, необхідна для виносу з клітини трьох іонів натрію:

$$3RT \ln \frac{[Na^+]_o}{[Na^+]_i},$$

де $[Na^+]_i$ – концентрація іонів натрію усередині клітини (у початковому стані), $[Na^+]_o$ – концентрація іонів натрію зовні клітини (у кінцевому стані).

Електрична робота дорівнює

$$z(\varphi_2 - \varphi_1) = z(\varphi_0 - \varphi_i),$$

де $z = +1$, тому що з клітини, яка має потенціал $\varphi_1 = -60$ мВ, викачується один позитивний заряд у середовище з потенціалом $\varphi_2 = 0$ мВ.

Енергія, яку необхідно затратити для вчинення одного циклу $\text{Na}^+, \text{K}^{+-}$ АТФазой, дорівнює сумі цих робіт:

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= 2RT \ln \frac{[\text{K}^+]_i}{[\text{K}^+]_o} + 3RT \ln \frac{[\text{Na}^+]_o}{[\text{Na}^+]_i} + zF(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= 2 \cdot 8,31 \cdot 310 \cdot \ln \frac{0,360}{0,010} + 3 \cdot 8,31 \cdot 310 \cdot \ln \frac{0,425}{0,069} + 1 \cdot 9,65 \cdot 10^4 \cdot (0 + 60) = \\ &= 18463 + 14050 + 5790 = 38303 \text{ Дж/моль} \approx 38 \text{ кДж/моль}.\end{aligned}$$

Розділ 6. Біофізика нервового імпульсу

Задача 6.1. Внутрішньоклітинна концентрація іонів калію в 20 разів перевищує зовнішню. Потенціал спокою при цьому дорівнює -80 мВ. Обчислити температуру клітини.

Розв'язання. З рівняння Нернста $\Delta\varphi = \frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{K}^+]_o}{[\text{K}^+]_i}$ знайдемо

$$T = \frac{\Delta\varphi z F}{R \ln \frac{[K_o]}{[K_i]}} = \frac{-80 \cdot 1 \cdot 96,5 \cdot 10^3}{8,31 \cdot \ln \frac{1}{20}} = 310 \text{ К} = 37 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Задача 6.2. Стала довжини немієлінізованого нервового волокна дорівнює 55 мкм. Потенціал у деякій точці цього волокна дорівнює φ_0 . На якій відстані від цієї точки потенціал зменшиться в три рази.

Розв'язання. Використовуючи вираз $\varphi = \varphi_0 \exp(-x/\lambda)$, отримаємо

$$\frac{\varphi_0}{\varphi} = \exp \frac{x}{\lambda} = 3$$

звідки знаходимо

$$x = \lambda \ln 3 = 55 \cdot \ln 3 = 60,4 \text{ мкм}.$$

Розділ 7. Біофізика м'язового скорочення

Задача 7.1. Для деякого м'яза при навантаженні 0,3 Н швидкість скорочення складає 24 мм/с. Навантаження в ізометричному режимі скорочення складає 1,1 Н, стала a дорівнює 0,2 Н. Обчислити максимальну швидкість скорочення.

Розв'язання. Запишемо рівняння Хілла

$$(P + a)(V + b) = (P_0 + a)b = a(V_{max} + b).$$

З останньої рівності знайдемо V_{max} :

$$V_{max} = bP_0/a,$$

а з першої – константу b :

$$b = \frac{V(P + a)}{P_0 - P}.$$

Тоді

$$V_{max} = \frac{VP_0(P + a)}{a(P_0 - P)} = \frac{24 \cdot 1,1 \cdot (0,3 + 0,2)}{0,2 \cdot (1,1 - 0,3)} = 72 \text{ мм/с.}$$

Задача 7.2. М'яз, скорочуючись із швидкістю 6 мм/с, розвиває потужність 2,7 мВт. Навантаження в ізометричному режимі скорочення для цього м'яза складає 0,8 Н, константа b дорівнює 23 мм/с. Обчислити роботу, зроблену м'язом за одну секунду.

Розв'язання. Робота м'яза дорівнює

$$A = PVt.$$

Навантаження P знайдемо з формули для потужності:

$$N = b(P_0 - P),$$

звідки

$$P = \frac{bP_0 - N}{b}.$$

Тоді

$$A = \frac{bP_0 - N}{b} Vt = \frac{23 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 - 2,7 \cdot 10^{-3}}{23 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Розділ 8. Біофізика зору

Задача 8.1. Розрахувати розділювальну здатність людського ока на відстані 10 м від предмета, що розглядається. Середня відстань між колбочками складає 5 мкм, відстань між збіжною вузловою точкою і сітківкою – 15 мм.

Розв'язання. Розділювальна здатність ока визначається відстанню між колбочками, тобто мінімальним розміром зображення предмета на сітківці. Розмір зображення на сітківці предмета розміром H складає

$$h = \frac{l}{L} H,$$

де L – відстань до предмета, l – відстань між збіжною вузловою точкою і сітківкою.

Звідси одержуємо мінімальний розмір предмета, помітний оком на відстані L , тобто розділювальну здатність ока

$$H_{\min} = h_{\min} \frac{L}{l} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{10}{15 \cdot 10^{-3}} = 3,3 \text{ мм.}$$

Розділ 9. Дія фізичних факторів на біологічні об'єкти

Задача 9.1. Для рентгенологічного дослідження шлунка пацієнт прийняв розчин сульфату барію (BaSO_4). У скільки разів поглинання рентгенівського випромінювання шлунком вище, ніж навколишніми м'якими тканинами (H_2O). Вважати, що поглинання рентгенівського випромінювання даним атомом не залежить від того, у якій сполуці цей атом знаходиться.

Розв'язання. Відповідно до (9.4), відношення коефіцієнтів поглинання сульфату барію і води складає

$$\frac{\mu_{\text{тш}}}{\mu_{\text{тв}}} = \frac{k\lambda^3 (n_{\text{Ba}}Z_{\text{Ba}}^3 + n_{\text{S}}Z_{\text{S}}^3 + n_{\text{O}}Z_{\text{O}}^3)}{k\lambda^3 (n_{\text{H}}Z_{\text{H}}^3 + n_{\text{O}}Z_{\text{O}}^3)} = \frac{1 \cdot 56^3 + 1 \cdot 16^3 + 4 \cdot 8^3}{2 \cdot 1^3 + 1 \cdot 8^3} \approx 354,$$

де n – число атомів даного елемента в сполуці, Z – заряд ядра даного атома.

Тобто шлунок поглинає в 354 рази більше, ніж навколишні м'які тканини.

Розділ 10. Власні фізичні поля людини

Задача 10.1. На скільки відсотків збільшиться енергетична світність тіла людини, якщо його температура (37°C) збільшиться на 1°C . Тіло людини вважати сірим тілом.

Розв'язання. Відповідно до закону Стефана – Больцмана, енергетична світність сірого тіла складає

$$Re = \alpha\sigma T^4,$$

де σ – стала Стефана – Больцмана, $\sigma = 5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$, α – коефіцієнт поглинання сірого тіла.

Тоді відношення енергетичних світностей для двох різних температур складе

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{310+1}{310}\right)^4 = 1,013.$$

Тобто енергетична світність тіла в цьому випадку збільшиться на 1,3%, у той час як температура збільшиться тільки на 0,3 %.