

**Контрольні завдання для самостійної підготовки  
до аудиторних контрольних робіт  
з вищої математики  
для студентів заочної форми навчання  
за спеціальністю «Фармація»,  
терміни навчання: 4,5 дв; 4,5; 4,5мед; 5,5**

**ЗАВДАННЯ №1**

Знайти похідну першого порядку та диференціал функції

$$y = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

**РОЗВ'ЯЗОК**

Використовуючи правила диференціювання добутку та складної функції, знайдемо похідну даної функції:

$$\begin{aligned} y' &= (x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x})' = (x)' \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + x \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = 1 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot (1+x)}. \end{aligned}$$

Диференціал функції знайдемо за формулою:

$$dy = y' \cdot dx.$$

Отже:

$$dy = \left( \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot (1+x)} \right) dx.$$

## ЗАВДАННЯ №2

Знайти похідну другого порядку функції

$$y = (x^2 + 1)^3.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Використовуючи правила диференціювання степеневі та складної функції, знайдемо першу похідну даної функції:

$$\begin{aligned} y' &= \left[ (x^2 + 1)^3 \right]' = 3 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)' = 3 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x \cdot (x^2 + 1)^2 = \\ &= 6x \cdot (x^4 + 2x^2 + 1) = 6x^5 + 12x^3 + 6x. \end{aligned}$$

Знайдемо другу похідну:

$$y'' = (y')' = [6x^5 + 12x^3 + 6x]' = 5 \cdot 6x^4 + 3 \cdot 12x^2 + 6 = 30x^4 + 36x^2 + 6.$$

### ЗАВДАННЯ №3

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції

$$y = x^2 \cdot e^{-x}.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

1. Знайдемо область визначення функції. Функція визначена на числовій прямій. Отже, ОДЗ:  $(-\infty; +\infty)$ .

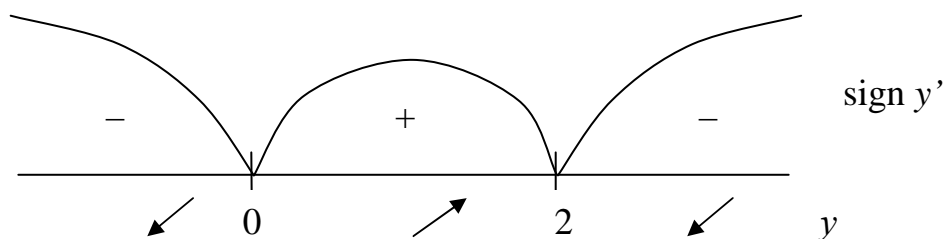
2. Дослідимо функцію на екстремум, знайдемо інтервали монотонності. Для цього знайдемо першу похідну та прирівняємо її до нуля.

$$y' = \left( \frac{x^2}{e^x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot x^2}{(e^x)^2} = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^1 \cdot 1}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{(2x - x^2)}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x(2-x)}{e^x} = 0.$$

Звідки:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2$ .

Отримали 2 стаціонарні точки та 3 інтервали монотонності. Дослідимо знак похідної на кожному з цих інтервалів:



На інтервалі  $(-\infty; 0)$   $y' < 0$ , отже функція спадає;

на інтервалі  $(0; 2)$   $y' > 0$ , отже функція зростає;

на інтервалі  $(2; \infty)$   $y' < 0$ , отже функція спадає.

Відповідно точки  $x_1 = 0$  та  $x_2 = 2$  є точками екстремуму. Оскільки при переході через точку  $x_1 = 0$  похідна змінює знак з « $-$ » на « $+$ », то дана точка є точкою мінімуму, при переході через точку  $x_2 = 2$  похідна змінює свій знак з « $+$ » на « $-$ », то дана точка є точкою максимуму.

Знайдемо мінімальне та максимальне значення функції:

$$y_{\min} = \frac{0^2}{e^0} = 0; \quad y_{\max} = \frac{2^2}{e^2} \approx 0,54.$$

## ЗАВДАННЯ №4

Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x + 15.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

1. Знайдемо область визначення функції. Функція – поліном третього степеня, визначна на числовій прямій. Отже, ОДЗ:  $(-\infty; +\infty)$ .

2. Дослідимо функцію на опуклість та вгнутість, знайдемо точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну та прирівняємо її до нуля.

$$y' = 3x^2 - 10x + 3;$$

$$y'' = (y')' = 6x - 10 = 2(3x - 5);$$

$$y'' = 0, \text{ якщо } 3x - 5 = 0, \text{ звідки } x = \frac{5}{3}.$$

Отримали одну критичну точку  $x = \frac{5}{3}$  та 2 інтервали опуклості і вгнутості.

Для  $x \in (-\infty; 5/3)$   $y''(x) < 0$ , бо, наприклад,  $y''(0) = -10 < 0$ , а для  $x \in (5/3; \infty)$   $y''(x) > 0$ , оскільки, наприклад,  $y''(4) = 14 > 0$ . Отже, в інтервалі  $(-\infty; 5/3)$  крива є опуклою, а в інтервалі  $(5/3; +\infty)$  – вгнутою.

Відповідно точка  $x = \frac{5}{3}$  є точкою перегину, оскільки при переході через неї друга похідна змінює свій знак з «-» на «+».

Знайдемо значення функції в точці перегину:

$$y\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 3\frac{5}{3} + 15 = \frac{290}{27}.$$

## ЗАВДАННЯ №5

Знайти максимальну абсолютну та відносну похибки функції

$$P = I \cdot U, \text{ при } I = 0,5 \pm 0,01; U = 215 \pm 2.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Для визначення максимальної абсолютної похибки застосуємо диференціальне числення. Отримаємо:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial I} \cdot dI + \frac{\partial P}{\partial U} \cdot dU.$$

Замінімо диференціал на приріст функції. Отримаємо:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial I} \cdot \Delta I + \frac{\partial P}{\partial U} \cdot \Delta U.$$

Знайдемо частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial P}{\partial I} = (I \cdot U)'_I = U;$$

$$\frac{\partial P}{\partial U} = (I \cdot U)'_U = I.$$

При  $I = 0,5 \pm 0,01$ ;  $U = 215 \pm 2$  будемо мати:

$$\frac{\partial P}{\partial I} = 215; \Delta I = 0,01;$$

$$\frac{\partial P}{\partial U} = 0,5; \Delta U = 2.$$

Отже:

$$\Delta P = 215 \cdot 0,01 + 0,05 \cdot 2 = 2,25 \text{ Вт.}$$

Відносну похибку знайдемо за формулою:

$$\partial P = \frac{\Delta P}{P} \cdot 100\%.$$

Підставимо числові значення, отримаємо:

$$\partial P = \frac{2,25}{0,5 \cdot 215} \cdot 100\% \approx 2,1\%.$$

## ЗАВДАННЯ №6

Знайти екстремум функції двох змінних

$$z = x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 4x + 8y.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Для знаходження точок екстремуму даної функції знайдемо частинні похідні по змінних  $X$  та  $Y$ , та прирівняємо їх до нуля. Отже:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 4x + 8y)'_x = 2x + 2y - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 4x + 8y)'_y = 2x + 8;$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (-4) + 2y - 4 = 0 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 + 2y = 0 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = -4 \end{cases}$$

Отримали 1 стаціонарну точку:  $O(-4; 6)$ .

Для перевірки даної точки на екстремум знайдемо значення виразу:

$$\Delta = AC - B^2,$$

$$\text{де } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Знайдемо відповідні частинні похідні та їх значення в стаціонарній точці  $O(-4; 6)$ :

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x + 2y - 4)'_x = 2;$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x + 2y - 4)'_y = 2;$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x + 8)'_y = 0.$$

Тоді:

$$\Delta = 2 \cdot 0 - 2^2 = -4.$$

Оскільки вираз  $\Delta < 0$  ( $-4 < 0$ ), то в даній точці екстремуму немає, тобто дана функція не має точок екстремуму.

## ЗАВДАННЯ №7

Знайти інтеграл

$$\int \operatorname{ctg}(2x+1) dx .$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Зробимо заміну:

$$2x+1=t, \text{ ТОДІ } dt=2dx .$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int \operatorname{ctg}(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{ctg} t dt = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{\sin t} dt .$$

Зробимо заміну:

$$\sin t = u, \text{ ТОДІ } du = \cos t dt .$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + \ln|C| = \ln u^{\frac{1}{2}} + \ln|C| = \ln \left| C \cdot u^{\frac{1}{2}} \right| = \ln \left| C \cdot \sqrt{u} \right| .$$

Оскільки  $u = \sin t$ , то :

$$\ln \left| C \cdot \sqrt{u} \right| = \ln \left| C \cdot \sqrt{\sin t} \right| .$$

Оскільки  $t = 2x+1$ , то :

$$\ln \left| C \cdot \sqrt{\sin t} \right| = \ln \left| C \cdot \sqrt{\sin(2x+1)} \right| .$$

## ЗАВДАННЯ №8

Знайти інтеграл:

$$\int x^2 \cdot \ln(1+x) dx .$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du .$$

Позначимо:

$$\begin{cases} x^2 dx = dv \\ \ln(1+x) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{x^3}{3} \\ du = \frac{1}{x+1} \end{cases} .$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int x^2 \cdot \ln(1+x) dx = \ln(1+x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x+1} dx .$$

В підінтегральному виразі отримали неправильний дріб. Розділимо чисельник на знаменник. Отримаємо:

$$\begin{array}{r} x^3 \quad | \quad x+1 \\ \hline x^3 + x^2 \\ -x^2 \\ \hline -x^2 - x \\ \quad x \\ \hline \quad x+1 \\ \quad \quad -1 \end{array}$$

Отже:

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} .$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x+1} dx &= \frac{\ln(1+x) \cdot x^3}{3} - \frac{1}{3} \int \left( x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[ \ln(1+x) \cdot x^3 - \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right) \right] + C . \end{aligned}$$



## ЗАВДАННЯ №9

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Зробимо заміну:

$$x+1=t, \text{ ТОДІ } dt = dx.$$

$$\text{При } x=0 \quad t=1;$$

$$x=1 \quad t=2.$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \int_1^2 \sqrt{t} dt = \int_1^2 t^{1/2} dt = \left. \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} \right|_1^2 = \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}) \approx 1,22.$$

## ЗАВДАННЯ №10

Знайти середнє значення функції на інтервалі  $[0; \pi/3]$ :

$$y = \sin 3x.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Середнє значення функції на інтервалі  $[a; b]$  розраховується за формулою:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}.$$

Підставимо числові значення. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\int_0^{\pi/3} \sin 3x dx}{\pi/3 - 0} = \frac{3}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/3} \sin 3x dx = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\cos 3x) \Big|_0^{\pi/3} = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos 3x \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{\pi} \cdot (-1 - 1) = \frac{2}{\pi} \approx 0,637. \end{aligned}$$

## ЗАВДАННЯ №11

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y' + x = 0.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Проведемо перетворення:

$$x^2 y' + x = 0$$

$$x^2 y' = -x$$

$$y' = \frac{-x}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

Оскільки  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

Отримали рівняння зі змінними, що розподіляються:

$$dy = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int dy = \int -\frac{dx}{x} + C$$

$$y = \ln|x| + \ln|C|$$

$$y = \ln|Cx|$$

## ЗАВДАННЯ №12

Знайти частковий розв'язок однорідного диференціального рівняння першого порядку при початкових умовах  $y(x_0) = y_0$ :

$$xy^2 y' - x^3 - y^3 = 0; \quad y(1) = \sqrt[3]{3}.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Розв'яжемо рівняння відносно  $y'$ :

$$x^2 y^2 y' = x^3 + y^3;$$

$$y' = \frac{x^3}{xy^2} + \frac{y^3}{xy^2};$$

$$y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}.$$

Зробимо заміну  $y = u \cdot x$ , де  $u = u(x)$ . Тоді:  $y' = u'x + u$ .

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$u'x + u = \frac{1}{u^2} + u$$

$$u'x = \frac{1}{u^2}.$$

Оскільки  $u' = \frac{du}{dx}$ , то:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1}{u^2}.$$

Отримали рівняння із змінними, що розподіляються.

$$u^2 du = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int u^2 du = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{u^3}{3} = \ln|x| + \ln|C|.$$

$$u^3 = 3 \ln|xC|.$$

Відносно  $y = u \cdot x$  загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y^3 = 3x^3 \ln|xC| \Rightarrow y = x \sqrt[3]{3 \ln|xC|}.$$

Для знаходження постійної  $C$  скористуємося початковими умовами:

$$y(x=1) = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{3} = 1 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \ln|C|}$$

$$3 = 3 \ln C$$

$$\ln C = 1 \quad C_0 = e$$

Частинний розв'язок має вигляд:

$$y = x \sqrt[3]{3 \ln|ex|} = x \sqrt[3]{3(\ln|x| + 1)}.$$

## ЗАВДАННЯ №13

Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$y' - \frac{3y}{x} = x.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Зробимо заміну  $y = u \cdot v$ , де  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ . Тоді:

$$y' = u'v + v'u.$$

Підставимо дану заміну:

$$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x;$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) = x.$$

Знайдемо таку функцію  $v(x)$ , при якій:

$$v' - \frac{3}{x}v = 0.$$

Це рівняння з відокремленими змінними.

$$v' = \frac{3}{x}v;$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3}{x}v;$$

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int \frac{dv}{v} = \int 3\frac{dx}{x};$$

$$\ln v = 3\ln x = \ln x^3.$$

Тоді  $v = x^3$ .

Підставимо знайдену функцію  $v(x) = x^3$  в рівняння. Отримаємо:

$$u'x^3 + u\left(3x^2 - \frac{3}{x}x^3\right) = x.$$

Оскільки  $u' = \frac{du}{dx}$ , то

$$\frac{du}{dx}x^3 = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності. Отримаємо:

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2};$$

$$u = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = C - \frac{1}{x}.$$

Отже:

$$v = x^3, \text{ а } u = C - \frac{1}{x}.$$

Тоді загальний розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y = u \cdot v = \left( C - \frac{1}{x} \right) x^3 = Cx^3 - x^2.$$

## ЗАВДАННЯ №14

Знайти частковий розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами при початкових умовах:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

$$y'' + 4y' = 0; \quad y(0) = -6, \quad y'(0) = -1.$$

### РОЗВ'ЯЗОК

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння.

$$r^2 + 4r = 0;$$

$$r \cdot (r + 4) = 0.$$

Звідки:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -4.$$

Оскільки корені дійсні і різні, то загальний розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-4x} = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

Для знаходження постійних інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  скористаємось початковими умовами:  $y(x=0) = -6$ ,  $y'(x=0) = -1$ . Отримаємо:

$$y' = (C_1 + C_2 \cdot e^{-4x})' = -4 \cdot C_2 \cdot e^{-4x}$$

$$\begin{cases} -6 = C_1 + C_2 \cdot e^{-4 \cdot 0} \\ -1 = -4 \cdot C_2 \cdot e^{-4 \cdot 0} \end{cases} = \begin{cases} -6 = C_1 + C_2 \\ -1 = -4 \cdot C_2 \end{cases} = \begin{cases} C_1 = -6 - C_2 \\ C_2 = \frac{1}{4} \end{cases} = \begin{cases} C_1 = -6 - \frac{1}{4} = -\frac{25}{4} \\ C_2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Отже частковий розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y = \frac{1}{4} - \frac{25}{4} \cdot e^{-4x} = \frac{1 - 25 \cdot e^{-4x}}{4}.$$



## ЗАВДАННЯ №15

У скрині знаходяться 25 кульок, серед яких 19 синіх і 6 жовтих, випадковим чином обрані 3 кульки для перевірки їх кольору. Знайти імовірність того, що а) всі три кульки сині; б) серед трьох кульок одна жовта; в) всі три кульки жовті.

### РОЗВ'ЯЗОК

Подія А – всі три кульки сині.

Подія Б – серед трьох кульок одна жовта.

Подія В – всі три кульки жовті.

Ймовірність події А знайдемо за формулою класичної ймовірності:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\omega)},$$

$N(A)$  – кількість варіантів, які задовольняють умовам події А – кількість варіантів вибрати 3 сині кульки з 19.

$N(\omega)$  – загальна кількість варіантів вибрати 3 кульки з 25.

$$N(A) = C_{19}^3 = \frac{19!}{3!(19-3)!} = 969; \quad N(\omega) = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = 2300$$

Тоді ймовірність події А буде мати значення:

$$P(A) = \frac{969}{2300} \approx 0,4213.$$

Аналогічно знайдемо ймовірності подій Б і В.

Подія Б складається із кількості варіантів вибрати 2 сині кульки і 1 жовту, тобто:

$$N(B) = C_{19}^2 \cdot C_6^1 = \frac{19!}{2!(19-2)!} \cdot \frac{6!}{1!(6-1)!} = 1026$$

Ймовірність події Б буде мати значення:

$$P(B) = \frac{1026}{2300} \approx 0,4461$$

Подія В складається із кількості варіантів вибрати 3 жовті кульки, тобто:

$$N(V) = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

Ймовірність події В буде мати значення:

$$P(V) = \frac{20}{2300} \approx 0,0087$$

## ЗАВДАННЯ №16

За числовим законом розподілу дискретної випадкової величини  $X$ :

$x_i$	12	15	19	22	23
$p_i$	0,6	0,05	0,05	0,2	0,1

Знайти числові характеристики: а) математичне сподівання  $M(X)$ ; б) дисперсію  $D(X)$ ; в) середнє квадратичне відхилення  $\sigma(X)$ .

### РОЗВ'ЯЗОК

а) Математичне сподівання дискретної випадкової величини  $X$  знайдемо за формулою:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 12 \cdot 0,6 + 15 \cdot 0,05 + 19 \cdot 0,05 + 22 \cdot 0,2 + 23 \cdot 0,1 = 15,6.$$

б) Дисперсію дискретної випадкової величини  $X$  знайдемо за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - [M(X)]^2 = 12^2 \cdot 0,6 + 15^2 \cdot 0,05 + 19^2 \cdot 0,05 + 22^2 \cdot 0,2 + 23^2 \cdot 0,1 - [15,6]^2 = 22,04.$$

в) Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини  $X$  знайдемо за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{22,04} = 4,695.$$

## ЗАВДАННЯ №17

Випадкова величина  $X$  розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням  $a=8$  і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma=1$ . Знайти:  
а) ймовірність  $P(7 < X < 10)$  попадання випадкової величини в інтервал  $(7; 10)$ ;  
б) величину інтервалу  $\delta$ , в який із заданою імовірністю  $P=0,99$  попадає значення випадкової величини  $X$   $P(|X - a| < \delta) = P$ .

### РОЗВ'ЯЗОК

а) Ймовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, що належить інтервалу  $(\alpha; \beta)$ , розрахуємо за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Знайдемо значення аргументів функції Лапласа:

$$\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) = \frac{10 - 8}{1} = 2; \quad \left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \frac{7 - 8}{1} = -1.$$

Отже:

$$P(7 < X < 10) = \Phi(2) - \Phi(-1).$$

Оскільки  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ , то:

$$P(7 < X < 10) = \Phi(2) + \Phi(1).$$

За таблицею значень функції Лапласа  $\Phi(x)$  знаходимо:

$$\Phi(2) = 0,4772; \quad \Phi(1) = 0,3413.$$

Отже:

$$P(7 < X < 10) = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185.$$

б) Величину інтервалу  $\delta$ , в який із заданою імовірністю  $P=0,99$  попадає значення випадкової величини  $X$ , розрахуємо за формулою:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

Підставимо числові значення. Отримаємо:

$$0,99 = 2\Phi(\delta/1)$$

$$\frac{0,99}{2} = \Phi(\delta/1)$$

$$0,495 = \Phi(\delta/1)$$

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо, що  $\Phi(x) = 0,495$  при  $x = 2,57$ , тобто:

$$\frac{\delta}{1} = 2,57.$$

Звідки:

$$\delta = 2,57 \cdot 1 = 2,57.$$

## ЗАВДАННЯ №18

Заданий статистичний ряд розподілу вибірки.

$x_i$	-12	-11	-3	-1	0
$n_i$	4	3	3	6	4

Знайти: а) емпіричну функцію розподілу  $F^*(x)$ ; б) точкові оцінки параметрів розподілу: вибіркове середнє  $\bar{x}_e$ , виправлену дисперсію  $S^2$ , виправлене середнє квадратичне відхилення  $S$ .

### РОЗВ'ЯЗОК

а) знайдемо об'єм вибірки:

$$n = 4 + 3 + 3 + 6 + 4 = 20.$$

Запишемо емпіричну функцію розподілу  $F^*(x)$ :

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -12 \\ 4/20 & \text{при } -12 < x \leq -11 \\ 4/20 + 3/20 & \text{при } -11 < x \leq -3 \\ 4/20 + 3/20 + 3/20 & \text{при } -3 < x \leq -1 \\ 4/20 + 3/20 + 3/20 + 6/20 & \text{при } -1 < x \leq 0 \\ 4/20 + 3/20 + 3/20 + 6/20 + 4/20 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

або:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -12 \\ 0,2 & \text{при } -12 < x \leq -11 \\ 0,35 & \text{при } -11 < x \leq -3 \\ 0,5 & \text{при } -3 < x \leq -1 \\ 0,8 & \text{при } -1 < x \leq 0 \\ 1,0 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

б) Вибіркове середнє знайдемо за формулою:

$$\bar{x}_e = \left( \sum_{i=1}^n x_i n_i \right) / n.$$

Отже:

$$\bar{x}_e = \frac{-12 \cdot 4 + (-11) \cdot 3 + (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 6 + 0 \cdot 4}{20} = -4,8.$$

Вибіркову дисперсію знайдемо за формулою:

$$D_e = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 n_i \right) / n - (\bar{x}_e)^2.$$

Отже:

$$D_s = \frac{(-12)^2 \cdot 4 + (-11)^2 \cdot 3 + (-3)^2 \cdot 3 + (-1)^2 \cdot 6 + 0^2 \cdot 4}{20} - (-4,8)^2 = 25,56.$$

Виправлену вибірккову дисперсію знайдемо за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_s.$$

Підставимо числові значення. Отримаємо:

$$S^2 = \frac{20}{20-1} \cdot 25,56 = 26,91.$$

Виправлене вибірккове середнє квадратичне відхилення визначимо за формулою:

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{26,92} \approx 5,187.$$

## ЗАВДАННЯ №19

За вибіркою об'єму  $n=14$  визначені вибіркове середнє  $\bar{x}_6 = 6,56$  і виправлене середнє квадратичне відхилення  $S = 1,1$  нормально розподіленої випадкової величини  $X$ . Знайти надійний інтервал для невідомого математичного сподівання  $a$  та дисперсії  $\sigma^2$ . Прийняти  $P = 0,95$ .

### РОЗВ'ЯЗОК

Довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання має вигляд:

$$\bar{x}_6 - \frac{t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_6 + \frac{t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot S}{\sqrt{n}},$$

де  $t_{1-\alpha/2}(n-1)$  – квантиль розподілу Стьюдента порядку  $p=1-\alpha/2$  з  $k=n-1$  степенями свободи.

За таблицею значень функції  $t_{1-\alpha/2}(n-1)$  при  $n=14$  і  $P=0,95$  знаходимо, що  $t_{0,975}(13) = 2,16$ .

Підставимо отримані значення. Будемо мати:

$$6,56 - \frac{2,16 \cdot 1,1}{\sqrt{14}} < a < 6,56 + \frac{2,16 \cdot 1,1}{\sqrt{14}};$$

$$6,56 - 0,635 < a < 6,56 + 0,635;$$

$$5,925 < a < 7,195.$$

Довірчий інтервал для оцінки дисперсії має вигляд:

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}.$$

За таблицею розподілу  $\chi_p^2(k)$  при степені свободи  $k=n-1=14-1=13$  знаходимо при рівні значущості  $\alpha=1-P=0,05$ ;  $\alpha/2=0,025$ :

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0,975}^2(13) = 24,7; \quad \chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0,025}^2(13) = 5,01.$$

Підставимо знайдені значення в формулу. Отримаємо:

$$\frac{(14-1) \cdot 1,1^2}{24,7} < \sigma^2 < \frac{(14-1) \cdot 1,1^2}{5,01}$$

$$0,639 < \sigma^2 < 3,084.$$

## ЗАВДАННЯ №20

У результаті проведення 5 дослідів отримані 5 пар значень  $(x_i; y_i)$ :

$x_i$	30	35	40	45	50
$y_i$	11,4	4,8	-0,1	-5,2	-10,4

Припускаючи, що  $x$  і  $y$  зв'язані лінійною залежністю  $y = kx + b$ , методом найменших квадратів знайти коефіцієнти  $k$  і  $b$ , а вибірковий коефіцієнт кореляції  $r_s$ . Перевірити значущість кореляційної залежності. Прийняти рівень значущості  $\alpha = 0,1$ .

### РОЗВ'ЯЗОК

Кореляційну функцію залежності будемо шукати у вигляді:

$$y = kx + b.$$

Коефіцієнти  $k$  та  $b$  знайдемо за методом найменших квадратів із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = b \cdot n + k \cdot \sum x \\ \sum yx = b \cdot \sum x + k \cdot \sum x^2 \end{cases}$$

Для розв'язання даної системи складемо розрахункову таблицю:

$n$	$X$	$Y$	$Y \cdot X$	$Y^2$	$X^2$
1	30	11,4	342	129,96	900
2	35	4,8	168	23,04	1225
3	40	-0,1	-4	0,01	1600
4	45	-5,2	-234	27,04	2025
5	50	-10,4	-520	108,16	2500
Разом	200	0,5	-248	288,21	8250

Підставимо отримані значення у систему рівнянь. Отримаємо:

$$\begin{cases} 0,5 = b \cdot 5 + k \cdot 200 \\ -248 = b \cdot 200 + k \cdot 8250 \end{cases} = \begin{cases} 0,1 = b + k \cdot 40 \\ -248 = b \cdot 200 + k \cdot 8250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,1 - k \cdot 40 \\ -248 = (0,1 - k \cdot 40) \cdot 200 + k \cdot 8250 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0,1 - k \cdot 40 \\ -248 = 20 - 8000 \cdot k + 8250 \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,1 - k \cdot 40 \\ -248 = 20 + 250 \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,1 - k \cdot 40 \\ k = \frac{-248 - 20}{250} = -1,072 \end{cases}$$

$$\text{Тоді: } b = 0,1 - (-1,072) \cdot 40 = 42,98$$

Отримали рівняння:



$$y = -1,072 \cdot x + 42,98.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Знайдемо необхідні величини:

$$\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{-248}{5} = -49,6$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{200}{5} = 40$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{0,5}{5} = 0,1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{8250}{5} - 40^2} = 7,071$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{288,21}{5} - 0,1^2} = 7,792$$

Підставимо отримані значення, будемо мати:

$$r_6 = \frac{-49,6 - 40 \cdot 0,1}{7,071 \cdot 7,792} = -0,992.$$

Для перевірки значущості кореляційної залежності розрахуємо значення критерію, що спостерігається:

$$t_{cn} = |r_6| \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_6^2}}.$$

Підставимо числові значення, отримаємо:

$$t_{cn} = |-0,9985| \cdot \frac{\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-(-0,9985)^2}} = 31,59$$

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента по заданому рівню значущості  $\alpha = 0,1$  і числу степенів свободи  $k = n - 2 = 5 - 2 = 3$  знаходимо критичну точку  $t_{kp}(\alpha; k)$  двосторонньої критичної області:

$$t_{kp}(0,1; 3) = 2,35.$$

Оскільки  $t_{cn} > t_{kp}$ , то коефіцієнт кореляції значимо відрізняється від нуля, тобто величини  $X$  та  $Y$  корельовано.