Контрольні завдання для самостійної підготовки
до аудиторних контрольних робіт
з ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
для студентів заочної форми навчання
за спеціальністю «Технологія парфумерно-косметичних засобів»,
терміни навчання: 4,5 дв; 4,5 фарм; 4,5мед; 5,5; 1,5 дв

ЗАВДАННЯ №1

Знайти похідну першого порядку та диференціал функції

$$y = x \cdot arctg\sqrt{x}.$$

РОЗВ'ЯЗОК

Використовуючи правила диференціювання добутку та складної функції, знайдемо похідну даної функції:

$$y' = \left(x \cdot arctg\sqrt{x}\right)' = (x)' \cdot arctg\sqrt{x} + x \cdot \left(arctg\sqrt{x}\right)' = 1 \cdot arctg\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= arctg\sqrt{x} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = arctg\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot (1+x)}.$$

Диференціал функції знайдемо за формулою:

$$dy = y' \cdot dx.$$

Отже:

$$dy = \left(arctg\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot (1+x)}\right) dx.$$

ЗАВДАННЯ №2

Знайти похідну другого порядку функції

$$y = \left(x^2 + 1\right)^3.$$

РОЗВ'ЯЗОК

Використовуючи правила диференціювання степеневої та складної функції, знайдемо першу похідну даної функції:

$$y' = \left[\left(x^2+1\right)^3\right] = 3\cdot\left(x^2+1\right)^2\cdot\left(x^2+1\right)' = 3\cdot\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x = 6x\cdot\left(x^2+1\right)^2 =$$

$$= 6x\cdot\left(x^4+2x^2+1\right) = 6x^5+12x^3+6x.$$

Знайдемо другу похідну:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left[6x^5+12x^3+6x\right]' = 5\cdot 6x^4+3\cdot 12x^2+6 = 30x^4+36x^2+6\,.$$

ЗАВДАННЯ №3

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції

$$y = x^2 \cdot e^{-x}.$$

РОЗВ’ЯЗОК

1. Знайдемо область визначення функції. Функція визначена на числовій прямій. Отже, ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$.

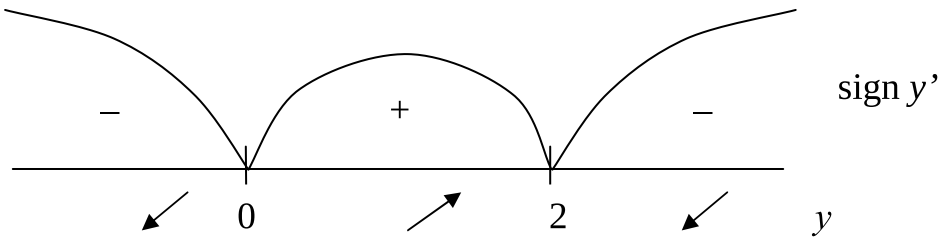
2. Дослідимо функцію на екстремум, знайдемо інтервали монотонності. Для цього знайдемо першу похідну та прирівняємо її до нуля.

$$y' = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)' \cdot e^x - \left(e^x\right)' \cdot x^2}{\left(e^x\right)^2} = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^1 \cdot 1}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot \left(2x - x^2\right)}{e^{2x}} = \frac{\left(2x - x^2\right)}{e^x} = \frac{x\left(2-x\right)}{e^x}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x\left(2-x\right)}{e^x} = 0.$$

Звідки: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Отримали 2 стаціонарні точки та 3 інтервали монотонності. Дослідимо знак похідної на кожному з цих інтервалів:



На інтервалі $(-\infty; 0)$ $y' < 0$, отже функція спадає;

на інтервалі $(0; 2)$ $y' > 0$, отже функція спадає;

на інтервалі $(2; \infty)$ $y' < 0$, отже функція спадає.

Відповідно точки $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$ є точками екстремуму. Оскільки при переході через точку $x_1 = 0$ похідна змінює знак з «–» на «+», то дана точка є точкою мінімуму, при переході через точку $x_2 = 2$ похідна змінює свій знак з «+» на «–», то дана точка є точкою максимуму.

Знайдемо мінімальне та максимальне значення функції:

$$y_{\min} = \frac{0^2}{e^0} = 0; \quad y_{\max} = \frac{2^2}{e^2} \approx 0,54.$$

ЗАВДАННЯ №4

Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x + 15.$$

РОЗВ'ЯЗОК

1. Знайдемо область визначення функції. Функція – поліном третього степеня, визначна на числовій прямій. Отже, ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$.

2. Дослідимо функцію на опуклість та вгнутість, знайдемо точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну та прирівняємо її до нуля.

$y' = 3x^2 - 10x + 3$;

$y'' = (y') = 6x - 10 = 2(3x - 5)$;

$y'' = 0$, якщо $3x - 5 = 0$, звідки $x = \dfrac{5}{3}$.

Отримали одну критичну точку $x = \dfrac{5}{3}$ та 2 інтервали опуклості і вгнутості.

Для $x \in (-\infty; 5/3)$ $y''(x) < 0$, бо, наприклад, $y''(0) = -10 < 0$, а для $x \in (5/3; \infty)$ $y''(x) > 0$, оскільки, наприклад, $y''(4) = 14 > 0$. Отже, в інтервалі $(-\infty; 5/3)$ крива є опуклою, а в інтервалі $(5/3; +\infty)$ – вгнутою.

Відповідно точка $x = \dfrac{5}{3}$ є точкою перегину, оскільки при переході через неї друга похідна змінює свій знак з «–» на «+».

Знайдемо значення функції в точці перегину:

$$y\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 3\frac{5}{3} + 15 = \frac{290}{27}.$$

ЗАВДАННЯ №5

Знайти максимальну абсолютну та відносну похибки функції

$$P = I \cdot U \text{, при } I = 0,5 \pm 0,01;\ U = 215 \pm 2.$$

РОЗВ’ЯЗОК

Для визначення максимальної абсолютної похибки застосуємо диференціальне числення. Отримаємо:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial I} \cdot dI + \frac{\partial P}{\partial U} \cdot dU .$$

Замінимо диференціал на приріст функції. Отримаємо:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial I} \cdot \Delta I + \frac{\partial P}{\partial U} \cdot \Delta U .$$

Знайдемо частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial P}{\partial I} = \left(I \cdot U \right)'_I = U ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial U} = \left(I \cdot U \right)'_U = I .$$

При $I = 0,5 \pm 0,01$; $U = 215 \pm 2$ будемо мати:

$$\frac{\partial P}{\partial I} = 215;\ \Delta I = 0,01;$$

$$\frac{\partial P}{\partial U} = 0,5;\ \Delta U = 2.$$

Отже:

$$\Delta P = 215 \cdot 0,01 + 0,05 \cdot 2 = 2,25 \text{ Вт.}$$

Відносну похибку знайдемо за формулою:

$$\partial P = \frac{\Delta P}{P} \cdot 100\% .$$

Підставимо числові значення, отримаємо:

$$\partial P = \frac{2,25}{0,5 \cdot 215} \cdot 100\% \approx 2,1\% .$$

ЗАВДАННЯ №6

Знайти екстремум функції двох змінних

$$z = x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 4x + 8y.$$

РОЗВ'ЯЗОК

Для знаходження точок екстремуму даної функції знайдемо частинні похідні по змінних *X* та *Y*, та прирівняємо їх до нуля. Отже:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 4x + 8y\right)'_x = 2x + 2y - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 4x + 8y\right)'_y = 2x + 8;$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (-4) + 2y - 4 = 0 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 + 2y = 0 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = -4 \end{cases}$$

Отримали 1 стаціонарну точку: $O(-4; 6)$.

Для перевірки даної точки на екстремум знайдемо значення виразу:

$$\Delta = AC - B^2,$$

де $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Знайдемо відповідні частинні похідні та їх значення в стаціонарній точці $O(-4; 6)$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2x + 2y - 4\right)'_x = 2;$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2x + 2y - 4\right)'_y = 2;$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2x + 8\right)'_y = 0.$$

Тоді:

$$\Delta = 2 \cdot 0 - 2^2 = -4.$$

Оскільки вираз $\Delta < 0$ $(-4 < 0)$, то в даній точці екстремуму немає, тобто дана функція не має точок екстремуму.

ЗАВДАННЯ №7

Знайти інтеграл

$$\int ctg\left(2x+1\right)dx .$$

РОЗВ'ЯЗОК

Зробимо заміну:

$2x+1=t$, тоді $dt=2dx$.

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int ctg\left(2x+1\right)dx=\frac{1}{2}\int ctgtdt=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\sin t}dt .$$

Зробимо заміну:

$$\sin t=u\text{, тоді } du=\cos tdt .$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\sin t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left|u\right|+\ln\left|C\right|=\ln u^{\frac{1}{2}}+\ln\left|C\right|=\ln\left|C\cdot u^{\frac{1}{2}}\right|=\ln\left|C\cdot\sqrt{u}\right| .$$

Оскільки $u=\sin t$, то :

$$\ln\left|C\cdot\sqrt{u}\right|=\ln\left|C\cdot\sqrt{\sin t}\right| .$$

Оскільки $t=2x+1$, то :

$$\ln\left|C\cdot\sqrt{\sin t}\right|=\ln\left|C\cdot\sqrt{\sin\left(2x+1\right)}\right| .$$

ЗАВДАННЯ №8

Знайти інтеграл:

$$\int x^2 \cdot \ln(1+x)\,dx .$$

РОЗВ'ЯЗОК

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du .$$

Позначимо:

$$\begin{cases} x^2 dx = dv \\ \ln(1+x) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x^3}{3} \\ du = \dfrac{1}{x+1} \end{cases} .$$

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int x^2 \cdot \ln(1+x)\,dx = \ln(1+x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x+1}\,dx .$$

В підінтегральному виразі отримали неправильний дріб. Розділимо чисельник на знаменник. Отримаємо:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & \underline{x+1} \\ \underline{x^3 + x^2} & x^2 - x + 1 \\ -x^2 & \\ \underline{-x^2 - x} & \\ x & \\ \underline{x+1} & \\ -1 & \end{array}$$

Отже:

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} .$$

Тоді:

$$\ln(1+x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \frac{\ln(1+x) \cdot x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\ln(1+x) \cdot x^3 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right) \right] + C.$$

ЗАВДАННЯ №9

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx.$$

РОЗВ'ЯЗОК

Зробимо заміну:

$x+1=t$, тоді $dt=dx$.

При $x=0 \quad t=1$;

$x=1 \quad t=2$.

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \int_1^2 \sqrt{t}dt = \int_1^2 t^{1/2}dt = \left.\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\right|_1^2 = \left.\frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\right|_1^2 = \left.\frac{2}{3}\cdot\sqrt{t^3}\right|_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{2^3}-\sqrt{1^3}\right) \approx 1,22.$$

ЗАВДАННЯ №10

Знайти середнє значення функції на інтервалі $[0;\pi/3]$:

$$y = \sin 3x.$$

РОЗВ'ЯЗОК

Середнє значення функції на інтервалі $[a;b]$ розраховується за формулою:

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Підставимо числові значення. Отримаємо:

$$\mu = \frac{\int\limits_0^{\pi/3} \sin 3x dx}{\pi/3 - 0} = \frac{3}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi/3} \sin 3x dx = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\cos 3x)\Big|_0^{\pi/3} = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos 3x\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot (\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{\pi} \cdot (-1-1) = \frac{2}{\pi} \approx 0,637.$$

ЗАВДАННЯ №11

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y' + x = 0.$$

РОЗВ'ЯЗОК

Проведемо перетворення:

$x^2 y' + x = 0$

$x^2 y' = x$

$y' = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$

Отримали рівняння зі змінними, що розподіляються:

$dy = \frac{dx}{x}.$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$\int dy = \int \frac{dx}{x} + C$

$y = \ln|x| + \ln|C|$

$y = \ln|Cx|$

ЗАВДАННЯ №12

Знайти частковий розв'язок однорідного диференціального рівняння першого порядку при початкових умовах $y(x_0)=y_0$:

$$xy^2y'-x^3-y^3=0; \quad y(1)=\sqrt[3]{3}.$$

РОЗВ'ЯЗОК

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$x^2y^2y'=x^3+y^3;$$

$$y'=\frac{x^3}{xy^2}+\frac{y^3}{xy^2};$$

$$y'=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}.$$

Зробимо заміну $y=u\cdot x$, де $u=u(x)$. Тоді: $y'=u'x+u$.

Підставимо дану заміну. Отримаємо:

$$u'x+u=\frac{1}{u^2}+u$$

$$u'x=\frac{1}{u^2}.$$

Оскільки $u'=\dfrac{du}{dx}$, то:

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{1}{u^2}.$$

Отримали рівняння із змінними, що розподіляються.

$$u^2du=\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int u^2du=\int\frac{dx}{x}.$$

$$\frac{u^3}{3}=\ln|x|+\ln|C|.$$

$$u^3=3\ln|xC|.$$

Відносно $y=u\cdot x$ загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y^3=3x^3\ln|xC| \Rightarrow y=x\sqrt[3]{3\ln|xC|}.$$

Для знаходження постійної C скористуємося початковими умовами:

$y(x=1)=\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{3}=1\cdot\sqrt[3]{3\cdot\ln|C|}$

$3=3\ln C$

$\ln C=1 \qquad C_0=e$

Частинний розв’язок має вигляд:

$y=x\sqrt[3]{3\ln|ex|}=x\sqrt[3]{3(\ln|x|+1)}$.

ЗАВДАННЯ №13

Знайти загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$y' - \frac{3y}{x} = x.$$

РОЗВ’ЯЗОК

Зробимо заміну $y = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тоді:

$y' = u'v + v'u$.

Підставимо дану заміну:

$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x$;

$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) = x$.

Знайдемо таку функцію $v(x)$, при якій:

$v' - \frac{3}{x}v = 0$.

Це рівняння з відокремленими змінними.

$v' = \frac{3}{x}v$;

$\frac{dv}{dx} = \frac{3}{x}v$;

$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$\int \frac{dv}{v} = \int 3\frac{dx}{x}$;

$\ln v = 3\ln x = \ln x^3$.

Тоді $v = x^3$.

Підставимо знайдену функцію $v(x) = x^3$ в рівняння. Отримаємо:

$u'x^3 + u\left(3x^2 - \frac{3}{x}x^3\right) = x$.

Оскільки $u' = \frac{du}{dx}$, то

$\frac{du}{dx}x^3 = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{x^2}$.

Проінтегруємо обидві частини рівності. Отримаємо:

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2};$$

$$u = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = C - \frac{1}{x}.$$

Отже:

$v = x^3$, а $u = C - \frac{1}{x}$.

Тоді загальний розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y = u \cdot v = \left(C - \frac{1}{x} \right) x^3 = Cx^3 - x^2.$$

ЗАВДАННЯ №14

Знайти частковий розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами при початкових умовах: $y(0)=y_0$, $y'(0)=y'_0$

$y''+4y'=0$; $y(0)=-6$, $y'(0)=-1$.

РОЗВ'ЯЗОК

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння.

$r^2+4r=0$;

$r\cdot(r+4)=0$.

Звідки:

$r_1=0$, $r_2=-4$.

Оскільки корені дійсні і різні, то загальний розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y=C_1\cdot e^{r1x}+C_2\cdot e^{r2x}=C_1\cdot e^{0\cdot x}+C_2\cdot e^{-4x}=C_1+C_2\cdot e^{-4x}.$$

Для знаходження постійних інтегрування C_1 і C_2 скористаємось початковими умовами: $y(x=0)=-6$, $y'(x=0)=-1$. Отримаємо:

$$y'=\left(C_1+C_2\cdot e^{-4x}\right)'=-4\cdot C_2\cdot e^{-4x}$$

$$\begin{cases}-6=C_1+C_2\cdot e^{-4\cdot 0}\\ -1=-4\cdot C_2\cdot e^{-4\cdot 0}\end{cases}=\begin{cases}-6=C_1+C_2\\ -1=-4\cdot C_2\end{cases}=\begin{cases}C_1=-6-C_2\\ C_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}=\begin{cases}C_1=-6-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{25}{4}\\ C_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

Отже частковий розв'язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y=\frac{1}{4}-\frac{25}{4}\cdot e^{-4x}=\frac{1-25\cdot e^{-4x}}{4}.$$

ЗАВДАННЯ №15

У скрині знаходяться 25 кульок, серед яких 19 синіх і 6 жовтих, випадковим чином обрані 3 кульки для перевірки їх кольору. Знайти імовірність того, що а) всі три кульки сині; б) серед трьох кульок одна жовта; в) всі три кульки жовті.

РОЗВ'ЯЗОК

Подія А – всі три кульки сині.

Подія Б – серед трьох кульок одна жовта.

Подія В – всі три кульки жовті.

Ймовірність події А знайдемо за формулою класичної ймовірності:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\omega)},$$

$N(A)$ – кількість варіантів, які задовольняють умовам події А – кількість варіантів вибрати 3 сині кульки з 19.

$N(\omega)$ – загальна кількість варіантів вибрати 3 кульки з 25.

$N(A)=C_{19}^{3}=\frac{19!}{3!\cdot(19-3)!}=969$; $N(\omega)=C_{25}^{3}=\frac{25!}{3!\cdot(25-3)!}=2300$

Тоді ймовірність події А буде мати значення:

$P(A)=\frac{969}{2300}\approx 0,4213$.

Аналогічно знайдемо ймовірності подій Б і В.

Подія Б складається із кількості варіантів вибрати 2 сині кульки і 1 жовту, тобто:

$N(Б)=C_{19}^{2}\cdot C_{6}^{1}=\frac{19!}{2!\cdot(19-2)!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot(6-1)!}=1026$

Ймовірність події Б буде мати значення:

$P(Б)=\frac{1026}{2300}\approx 0,4461$

Подія В складається із кількості варіантів вибрати 3 жовті кульки, тобто:

$N(B)=C_{6}^{3}=\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=20$

Ймовірність події В буде мати значення:

$P(B)=\frac{20}{2300}\approx 0,0087$

ЗАВДАННЯ №16

За числовим законом розподілу дискретної випадкової величини *X*:

x_i	12	15	19	22	23
p_i	0,6	0,05	0,05	0,2	0,1

Знайти числові характеристики: а) математичне сподівання *M(X)*; б) дисперсію *D(X)*; в) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

РОЗВ’ЯЗОК

а) Математичне сподівання дискретної випадкової величини *X* знайдемо за формулою:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 12\cdot 0,6+15\cdot 0,05+19\cdot 0,05+22\cdot 0,2+23\cdot 0,1=15,6.$$

б) Дисперсію дискретної випадкової величини *X* знайдемо за формулою:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-\left[M(X)\right]^2 = 12^2\cdot 0,6+15^2\cdot 0,05+19^2\cdot 0,05+22^2\cdot 0,2+23^2\cdot 0,1-\left[15,6\right]^2=22,04.$$

в) Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X* знайдемо за формулою:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{22,04}=4,695.$$

ЗАВДАННЯ №17

Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=8$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=1$. Знайти: а) ймовірність $P(7<X<10)$ попадання випадкової величини в інтервал $(7;10)$; б) величину інтервалу δ, в який із заданою імовірністю $P=0,99$ попадає значення випадкової величини X $P(|X-a|<\delta)=P$.

РОЗВ'ЯЗОК

а) Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, що належить інтервалу $(\alpha;\beta)$, розрахуємо за формулою:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Знайдемо значення аргументів функції Лапласа:

$$\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)=\frac{10-8}{1}=2; \quad \left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=\frac{7-8}{1}=-1.$$

Отже:

$$P(7<X<10)=\Phi(2)-\Phi(-1).$$

Оскільки $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, то:

$$P(7<X<10)=\Phi(2)+\Phi(1).$$

За таблицею значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо:

$$\Phi(2)=0,4772; \quad \Phi(1)=0,3413.$$

Отже:

$$P(7<X<10)=0,4772+0,3413=0,8185.$$

б) Величину інтервалу δ, в який із заданою імовірністю $P=0,99$ попадає значення випадкової величини X, розрахуємо за формулою:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma).$$

Підставимо числові значення. Отримаємо:

$0,99=2\Phi(\delta/1)$

$\frac{0,99}{2}=\Phi(\delta/1)$

$0,495 = \Phi\left(\delta/1\right)$

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо, що $\Phi\left(x\right) = 0,495$ при $x = 2,57$, тобто:

$$\frac{\delta}{1} = 2,57\,.$$

Звідки:

$$\delta = 2,57 \cdot 1 = 2,57\,.$$

ЗАВДАННЯ №18

Заданий статистичний ряд розподілу вибірки.

x_i	–12	–11	–3	–1	0
n_i	4	3	3	6	4

Знайти: а) емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$; б) точкові оцінки параметрів розподілу: вибіркове середнє $\overline{x_в}$, виправлену дисперсію S^2, виправлене середнє квадратичне відхилення S.

РОЗВ'ЯЗОК

а) знайдемо об'єм вибірки:

$n = 4+3+3+6+4 = 20$.

Запишемо емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -12 \\ 4/20 & \text{при} \quad -12 < x \le -11 \\ 4/20+3/20 & \text{при} \quad -11 < x \le -3 \\ 4/20+3/20+3/20 & \text{при} \quad -3 < x \le -1 \\ 4/20+3/20+3/20+6/20 & \text{при} \quad -1 < x \le 0 \\ 4/20+3/20+3/20+6/20+4/20 & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

або:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -12 \\ 0,2 & \text{при} \quad -12 < x \le -11 \\ 0,35 & \text{при} \quad -11 < x \le -3 \\ 0,5 & \text{при} \quad -3 < x \le -1 \\ 0,8 & \text{при} \quad -1 < x \le 0 \\ 1,0 & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

б) Вибіркове середнє знайдемо за формулою:

$$\overline{x_в} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i n_i\right) \Big/ n.$$

Отже:

$$\overline{x_в} = \frac{-12\cdot 4 + (-11)\cdot 3 + (-3)\cdot 3 + (-1)\cdot 6 + 0\cdot 4}{20} = -4,8.$$

Вибіркову дисперсію знайдемо за формулою:

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i\right) \Big/ n - \left(\overline{x_в}\right)^2.$$

Отже:

$$D_в = \frac{(-12)^2 \cdot 4 + (-11)^2 \cdot 3 + (-3)^2 \cdot 3 + (-1)^2 \cdot 6 + 0^2 \cdot 4}{20} - (-4,8)^2 = 25,56 .$$

Виправлену вибіркову дисперсію знайдемо за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в .$$

Підставимо числові значення. Отримаємо:

$$S^2 = \frac{20}{20-1} \cdot 25,56 = 26,91 .$$

Виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення визначимо за формулою:

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{26,92} \approx 5,187 .$$

ЗАВДАННЯ №19

За вибіркою об'єму $n = 14$ визначені вибіркове середнє $\overline{x_в} = 6,56$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 1,1$ нормально розподіленої випадкової величини *X*. Знайти надійний інтервал для невідомого математичного сподівання *a* та дисперсії σ^2. Прийняти $P = 0,95$.

РОЗВ'ЯЗОК

Довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання має вигляд:

$$\overline{x_в} - \frac{t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot S}{\sqrt{n}},$$

де $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ – квантиль розподілу Стьюдента порядка $p = 1-\alpha/2$ з $k = n-1$ степенями свободи.

За таблицею значень функції $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ при $n = 14$ і $P = 0,95$ знаходимо, що $t_{0,975}(13) = 2,16$.

Підставимо отримані значення. Будемо мати:

$$6,56 - \frac{2,16\cdot 1,1}{\sqrt{14}} < a < 6,56 + \frac{2,16\cdot 1,1}{\sqrt{14}};$$

$$6,56 - 0,635 < a < 6,56 + 0,635;$$

$$5,925 < a < 7,195.$$

Довірчий інтервал для оцінки дисперсії має вигляд:

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}.$$

За таблицею розподілу $\chi^2_P(k)$ при степені свободи $k = n-1 = 14-1 = 13$ знаходимо при рівні значущості $\alpha = 1-P = 0,05$; $\alpha/2 = 0,025$:

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,975}(13) = 24,7$; $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,975}(13) = 5,01$.

Підставимо знайдені значення в формулу. Отримаємо:

$$\frac{(14-1)\cdot 1,1^2}{24,7} < \sigma^2 < \frac{(14-1)\cdot 1,1^2}{5,01}$$

$$0,639 < \sigma^2 < 3,084.$$

ЗАВДАННЯ №20

У результаті проведення 5 дослідів отримані 5 пар значень $(x_i; y_i)$:

x_i	30	35	40	45	50
y_i	11,4	4,8	–0,1	–5,2	–10,4

Припускаючи, що x і y зв'язані лінійною залежністю $y = kx + b$, методом найменших квадратів знайти коефіцієнти k і b, а вибірковий коефіцієнт кореляції $r_в$. Перевірити значущість кореляційної залежності. Прийняти рівень значущості $\alpha = 0{,}1$.

РОЗВ'ЯЗОК

Кореляційну функцію залежності будемо шукати у вигляді:

$$y = kx + b.$$

Коефіцієнти k та b знайдемо за методом найменших квадратів із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = b \cdot n + k \cdot \sum x \\ \sum yx = b \cdot \sum x + k \cdot \sum x^2 \end{cases}$$

Для розв'язання даної системи складемо розрахункову таблицю:

n	X	Y	$Y \cdot X$	Y^2	X^2
1	30	11,4	342	129,96	900
2	35	4,8	168	23,04	1225
3	40	–0,1	–4	0,01	1600
4	45	–5,2	–234	27,04	2025
5	50	–10,4	–520	108,16	2500
Разом	200	0,5	–248	288,21	8250

Підставимо отримані значення у систему рівнянь. Отримаємо:

$$\begin{cases} 0{,}5 = b \cdot 5 + k \cdot 200 \\ -248 = b \cdot 200 + k \cdot 8250 \end{cases} = \begin{cases} 0{,}1 = b + k \cdot 40 \\ -248 = b \cdot 200 + k \cdot 8250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}1 - k \cdot 40 \\ -248 = (0{,}1 - k \cdot 40) \cdot 200 + k \cdot 8250 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}1 - k \cdot 40 \\ -248 = 20 - 8000 \cdot k + 8250 \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}1 - k \cdot 40 \\ -248 = 20 + 250 \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}1 - k \cdot 40 \\ k = \dfrac{-248 - 20}{250} = -1{,}072 \end{cases}$$

Тоді: $b = 0{,}1 - (-1{,}072) \cdot 40 = 42{,}98$

Отримали рівняння:

$$y = -1,072 \cdot x + 42,98 .$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} .$$

Знайдемо необхідні величини:

$$\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{-248}{5} = -49,6$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{200}{5} = 40$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{0,5}{5} = 0,1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{8250}{5} - 40^2} = 7,071$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \left(\overline{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{288,21}{5} - 0,1^2} = 7,792$$

Підставимо отримані значення, будемо мати:

$$r_в = \frac{-49,6 - 40 \cdot 0,1}{7,071 \cdot 7,592} = -0,992 .$$

Для перевірки значущості кореляційної залежності розрахуємо значення критерію, що спостерігається:

$$t_{сп} = \left|r_в\right| \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}} .$$

Підставимо числові значення, отримаємо:

$$t_{сп} = \left|-0,9985\right| \cdot \frac{\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-\left(-0,9985\right)^2}} = 31,59$$

За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента по заданому рівню значущості $\alpha = 0,1$ і числу степенів свободи $k = n - 2 = 5 - 2 = 3$ знаходимо критичну точку $t_{кр}\left(\alpha; k\right)$ двосторонньої критичної області:

$$t_{кр}\left(0,1; 3\right) = 2,35 .$$

Оскільки $t_{сп} > t_{кр}$, то коефіцієнт кореляції значимо відрізняється від нуля, тобто величини X та Y корельовано.